Instrucciones: La siguiente guía de aprendizaje evaluada tiene por objetivo que aprendas sobre la **Función exponencial, Crecimiento y Decrecimiento exponencial.** Encontrarás los ejercicios dados como ejemplos y los ejercicios de tarea **(▲)** que deberás enviar a tu profesor o profesora, a los siguientes correos:

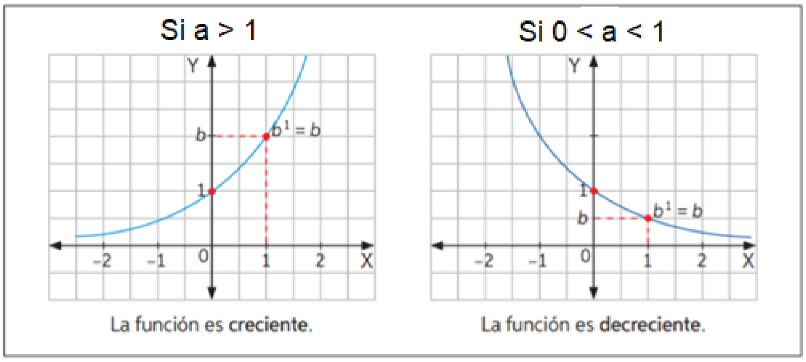
3° medio B y D d.beltran@coemco.cl y 3° medio A y C e.gonzalez@coemco.cl

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Se define como función exponencial a la función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

En una función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, donde $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, podemos observar lo siguiente:

- Su dominio es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es el conjunto de todos los números reales positivos $\mathbb{R}^+$.
- La gráfica intersecta el eje Y en el punto (0, 1) y no intersecta el eje X, que actúa como asíntota de la gráfica.
- La gráfica de una función exponencial de la forma $y = a^x$ depende del valor de a. Así:



Ejemplo 1: Dadas las funciones exponenciales I) $f(x) = 2^x$ y II) $\boldsymbol{g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$

a) Construir la gráfica
b) Determinar el dominio y recorrido
c) Encontrar la intersección con el eje Y
d) Comprobar si la función es creciente o decreciente

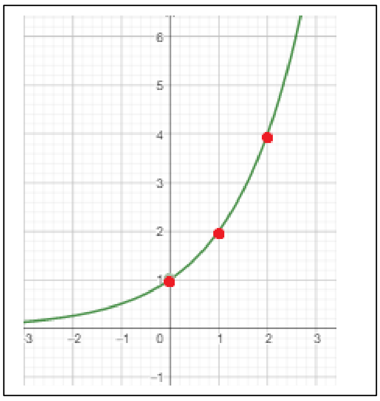
Solución I:

a) Para construir la gráfica debemos hacer una tabla de valores:

$$\boldsymbol{f(x) = 2^x}$$

Si x = 0 , entonces $f(0) = 2^0 = 1$
Si x = 1 , entonces $f(1) = 2^1 = 2$
Si x = 2 , entonces $f(2) = 2^2 = 4$

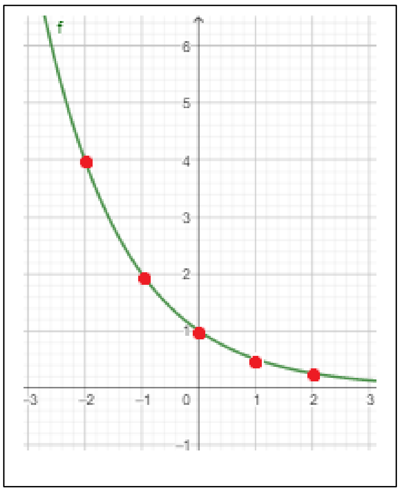
x	0	1	2
f(x)	1	2	4



b) Dom f = $\mathbb{R}$ y Rec f = $\mathbb{R}^+$
c) La curva intersecta al eje Y en el punto (0,1)
d) La función es creciente

Solución II:

a) Para construir la gráfica debemos hacer una tabla de valores:



$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Si x = -1 , entonces $\boldsymbol{g(-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1} = \mathbf{2^1 = 2}$

Si x = 0 , entonces $\boldsymbol{g(0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \mathbf{1}$

Si x = 1 , entonces $\boldsymbol{g(1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$

Si x = 2 , entonces $\boldsymbol{g(2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

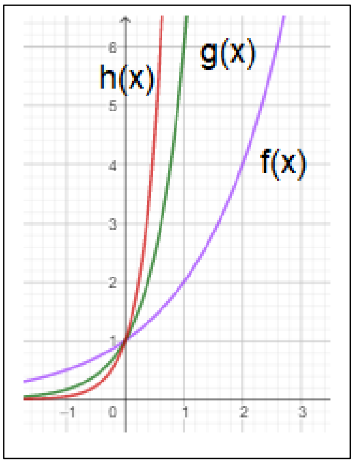
x	-1	0	1	2
g(x)	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b) Dom f = ℝ y Rec f = $\mathbb{R}^+$

c) La curva intersecta al eje Y en el punto (0,1)

d) La función es decreciente

CONTRACCIÓN Y DILATACIÓN DE LA GRÁFICA



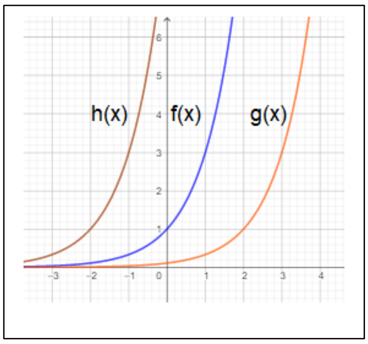
Ejemplo: Las siguientes curvas representan a las funciones exponenciales:

$\boldsymbol{f(x) = 2^x}$; $\boldsymbol{g(x) = 6^x}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{h(x) = 20^x}$

Como se puede observar, a la función $\boldsymbol{h(x) = 20^x}$ le corresponde una curva más contraída, mientras que a la función $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$ le corresponde la curva más dilatada

¿Qué puedes concluir?..

TRASLACIÓN HORIZONTAL DE LA GRÁFICA



Ejemplo: Las siguientes curvas representan a las funciones exponenciales:

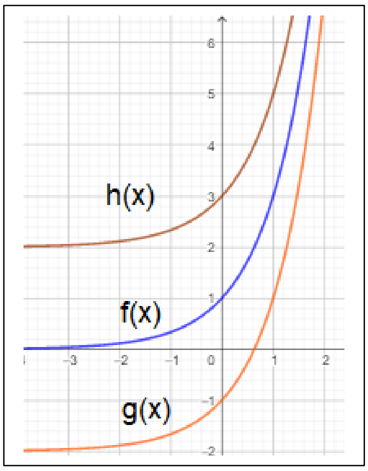
$\boldsymbol{f(x) = 3^x}$; $\boldsymbol{g(x) = 3^{x-2}}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{h(x) = 3^{x+2}}$

Como se puede observar la función $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$ se ha desplazado 2 unidades hacia la izquierda $\boldsymbol{h(x) = 3^{x+2}}$ y 2 unidades hacia la derecha $\boldsymbol{g(x) = 3^{x-2}}$

¿Qué puedes concluir?..

....

TRASLACIÓN VERTICAL DE LA GRÁFICA



Ejemplo: Las siguientes curvas representan a las funciones exponenciales:

$\boldsymbol{f(x) = 3^x}$; $\boldsymbol{g(x) = 3^x - 2}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{h(x) = 3^x + 2}$

Como se puede observar la función $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$ se ha desplazado 2 unidades hacia arriba $\boldsymbol{h(x) = 3^x + 2}$ y 2 unidades hacia abajo $\boldsymbol{g(x) = 3^x - 2}$

¿Qué puedes concluir?..

....

Observación: La traslación vertical cambia el recorrido de las funciones:

Rec *h(x)* :]2 , +∞[y Rec *g(x):*]-2 , +∞[

La función exponencial modela muchas situaciones de diversas áreas. Por ejemplo, en ciencias sociales, el crecimiento demográfico; en biología, el crecimiento bacteriano, y en economía, el interés compuesto, entre otras.
Si el crecimiento de las variables que experimenta un fenómeno se puede modelar con una función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ab^x}$, con $a > 0$ y $b > 1$, entonces presenta un ***Crecimiento exponencial.*** Si el crecimiento de las variables que experimenta un fenómeno se puede modelar con una función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ab^x}$, con $a > 0$ y $0 < b < 1$, entonces presenta un ***Decrecimiento exponencial.***

CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Ejemplo: En un laboratorio se estudia el comportamiento de un cultivo de bacterias. Inicialmente hay 100 bacterias. Cada una hora la cantidad de bacterias **se triplica**, es decir, al comienzo hay 100 bacterias, después de 1 hora habrán 100•3=300 bacterias, después de 2 horas habrán 100•3•3=900 bacterias, a las 3 horas habrán 100•3•3•3=2700 bacterias y así sucesivamente.

Al construir una tabla de valores con esta información, se tiene:

Tiempo *t* (horas)	**Cantidad de bacterias**	
0	100	$\leftrightarrow 100 \bullet 3^0 = 100$
1	300	$\leftrightarrow 100 \bullet 3^1 = 300$
2	900	$\leftrightarrow 100 \bullet 3^2 = 900$
3	2700	$\leftrightarrow 100 \bullet 3^3 = 2700$

En este caso, la función que permite modelar la situación está dada por:

$$f(t) = 100 \bullet 3^t$$

Con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde ***f(t)*** es la cantidad de bacterias y ***t*** es el tiempo expresado en horas

DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

Ejemplo: Durante una pandemia, la población está siendo infectada por el virus CORVIT2.0, cierta Universidad prueba una vacuna y observa que la cantidad de contagios **disminuye a la mitad** después de una semana. Si el estudio considera a 1.000.000 de personas contagiadas al comienzo, después de 1 semana habrá sólo 500.000 contagiados, en la semana siguiente habrá 250.000 contagiados y así sucesivamente.
Al construir una tabla de valores con esta información, se tiene:

Tiempo *t* (semanas)	**Cantidad de contagiados**	
0	1.000.000	$\leftrightarrow 1.000.000 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1.000.000$
1	500.000	$\leftrightarrow 1.000.000 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 500.000$
2	250.000	$\leftrightarrow 1.000.000 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 250.000$
3	125.000	$\leftrightarrow 1.000.000 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 125.000$

En este caso, la función que permite modelar la situación está dada por:

$$f(t) = 1.000.000 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

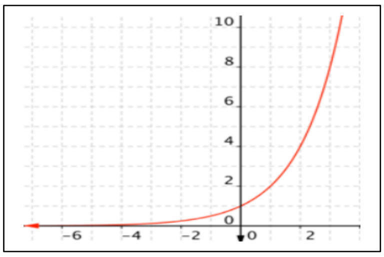
Con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde ***f(t)*** es la cantidad de contagiados y ***t*** es el tiempo expresado en semanas

Puedes revisar los siguientes videos:
Función exponencial: https://www.youtube.com/watch?v=Atf1UtHR7uw
https://www.youtube.com/watch?v=xo1gjiz9LDA
Crecimiento y decrecimiento exponencial: https://www.youtube.com/watch?v=rfcv-pUn60I

EJERCICIOS EVALUADOS DE TAREA

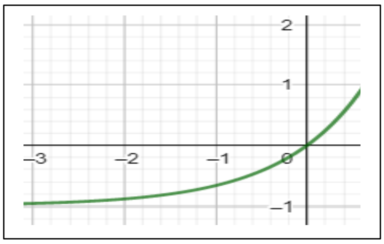
(▲) Tarea Ejercicio N° 1: ¿Cuál es el **dominio** de la función de la figura adjunta?

A) Todos los Reales
B) Todos los Reales positivos
C)] 0 , +∞[
D)]-6 , +∞[



(▲) Tarea Ejercicio N° 2: El **recorrido** de la función de la figura adjunta es:

A) Todos los Reales
B) Todos los Reales positivos
C)]-1 , +∞[
D)]-3 , +∞[



(▲) Tarea Ejercicio N° 3: ¿Cuál de las siguientes tablas de valores corresponde a la función $f(x) = 3^x$?

A)

x	2	4	6
f(x)	6	12	18

B)

x	1	3	5
f(x)	3	9	15

C)

x	0	2	4
f(x)	1	9	12

D)

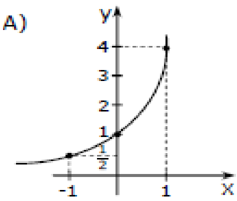
x	1	3	4
f(x)	3	27	81

(▲) Tarea Ejercicio N° 4: Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, ¿cuánto es $f(-2)$?

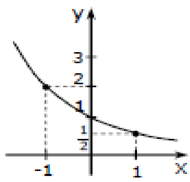
A) $-\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$ D) 9 E) 6

(▲) Tarea Ejercicio N° 5: El gráfico de la función $f(x) = 2^{x-1}$ está representado por la opción

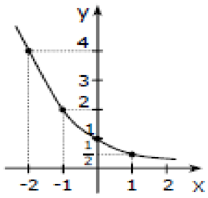
A)



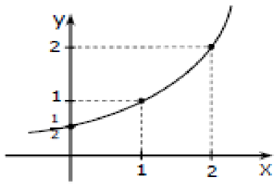
B)



C)



D)



(▲) Tarea Ejercicio N° 6: Problema de desarrollo. (4 puntos)

En una red social mundial de internet, por cada semana que pasa, la cantidad de personas asociadas a esa red se duplica. Si inicialmente había doscientas personas a esa red:

a) Encuentre la función que describe la cantidad de personas asociadas a esa red, al final de ***t*** semanas.
b) ¿Cuántas personas asociadas habrán a las 7 semanas?

Si lo puedes soñar, lo puedes hacer.			
Elaboró	***Deyanira Beltrán Gómez***	*Revisó y Autorizó*	***Srta. Valeria Zagal Riffo*** ***Jefa de UTP***